Introduction aux modèles graphiques et copules

Gildas Mazo
Université Paris-Saclay, INRAE, MaIAGE, 78350, Jouy-en-Josas, France

Journées NetBio 2025, 24–25 novembre 2025 à Orléans

Note : ces diaporamas sont le support d'une présentation orale donnée aux journées NetBio le 24 novembre 2025 et ne sauraient être interprêtées en dehors du contexte pour lesquelles elles ont été créées.

Première partie : modèles graphiques

Relations d'indépendance conditionnelles

Représenter les dépendances avec un graphe

Une salve de résultats négatifs !

Le compromis

Deuxième partie : copules

Première partie I

Modèles graphiques

Modèles graphiques : pourquoi ?

- Déchiffrer comment les composantes d'un système complexe s'influencent mutuellement compte parmi les problèmes les plus difficiles en science.
- En statistique, ont été développés dans les années 1990 les modèles graphiques [1]
- Les modèles graphiques sont un outil puissant pour savoir qui dépend de qui sachant qui. (Quelle partie du système, si elle était connue, rend inutile une autre partie ?)
- Les modèles graphiques sont un outil pour expliquer et comprendre, pas pour prédire.

1. Lauritzen, Pearl & Paz, Studený, Matús, Dawid, et d'autres.

Pourquoi pas les corrélations ?

- Il existe beaucoup de mesures d'association (corrélations de Pearson, Spearman, Kendall, Chatterjee ; critère d'information mutuelle, etc).
- Mais quelque soit la mesure choisie, deux composantes du système peuvent être corrélées juste parce qu'elles sont chacune corrélées à une troisième.
- On veut donc éliminer les facteurs confondants.

Quelques exemples dans la littérature après une (très) rapide recherche [4]

Zhao *et al* (2024), Nature Genetics : [2]

> *[. . .] when assessing the role of a gene in a trait using its eQTLs, nearby variants and genetic components of other genes' expression may be correlated with these eQTLs and have direct effects on the trait, acting as* ***potential confounders****.*

Lasserre *et al* (2013), Plos Computational Biology : [3]

> *Within the partial correlation framework,* ***correlations among two variables are controlled for associations induced by the other variables****. Partial correlation networks thus focus on direct associations of histone modifications.*

2. Adjusting for genetic confounders in transcriptome-wide association studies improves discovery of risk genes of complex traits
3. Finding Associations among Histone Modifications Using Sparse Partial Correlation Networks
4. gene correlation confound transcription factor, Web of Science

Relations d'indépendance conditionnelles

Relations d'indépendance conditionnelles

- Soit $X = (X_1, \ldots, X_d)$ un vecteur aléatoire dont les composantes X_j dépendent les unes des autres.
- Soient X_A, X_B et X_C des sous-vecteurs disjoints.

Relations d'indépendance conditionnelles

- Soit $X = (X_1, \dots, X_d)$ un vecteur aléatoire dont les composantes X_j dépendent les unes des autres.
- Soient X_A, X_B et X_C des sous-vecteurs disjoints.
- On dit que X_A **et** X_B **sont conditionellement indépendants sachant** X_C si

$$\Pr\{\alpha_1 < X_A \leq \alpha_2 | X_B, X_C\} = \Pr\{\alpha_1 < X_A \leq \alpha_2 | X_C\}.$$

- On écrit $X_A \perp\!\!\!\perp X_B | X_C$; sinon on écrit X_A dep $X_B | X_C$.

Les concepts d'association statistique et de dépendance conditionnelle sont différents

Soient X_1, X_2 et X_3. Est-ce que

- $X_1 \text{ dep } X_2 \implies X_1 \text{ dep } X_2 | X_3$?
  $(X_1 \perp\!\!\!\perp X_2 | X_3 \implies X_1 \perp\!\!\!\perp X_2\,?)$
- $X_1 \text{ dep } X_2 \Longleftarrow X_1 \text{ dep } X_2 | X_3$?
  $(X_1 \perp\!\!\!\perp X_2 \implies X_1 \perp\!\!\!\perp X_2 | X_3\,?)$

5. Pearl & Paz (1987) Graphoids : graph-based logic for reasoning about relevance relations or When would x tell you more about y if you already know z ? Advances in Artificial Intelligence.

Les concepts d'association statistique et de dépendance conditionnelle sont différents

Soient X_1, X_2 et X_3. Est-ce que

- $X_1 \text{ dep } X_2 \implies X_1 \text{ dep } X_2|X_3$?
  ($X_1 \perp\!\!\!\perp X_2|X_3 \implies X_1 \perp\!\!\!\perp X_2$?)
  Non : prendre $X_1 = Y_1X_3$ et $X_2 = Y_2X_3$ avec Y_1, Y_2, X_3 indépendantes.
- $X_1 \text{ dep } X_2 \impliedby X_1 \text{ dep } X_2|X_3$?
  ($X_1 \perp\!\!\!\perp X_2 \implies X_1 \perp\!\!\!\perp X_2|X_3$?)

---

5. Pearl & Paz (1987) Graphoids : graph-based logic for reasoning about relevance relations or When would x tell you more about y if you already know z? Advances in Artificial Intelligence.

Les concepts d'association statistique et de dépendance conditionnelle sont différents

Soient X_1, X_2 et X_3. Est-ce que

- X_1 dep $X_2 \implies X_1$ dep $X_2|X_3$?
  ($X_1 \perp\!\!\!\perp X_2|X_3 \implies X_1 \perp\!\!\!\perp X_2$?)
  Non : prendre $X_1 = Y_1X_3$ et $X_2 = Y_2X_3$ avec Y_1, Y_2, X_3 indépendantes.
- X_1 dep $X_2 \Longleftarrow X_1$ dep $X_2|X_3$?
  ($X_1 \perp\!\!\!\perp X_2 \implies X_1 \perp\!\!\!\perp X_2|X_3$?)
  Non : lancer deux pièces et faire sonner une cloche à chaque fois qu'elles tombent sur la même face. [5]

5. Pearl & Paz (1987) Graphoids : graph-based logic for reasoning about relevance relations or When would x tell you more about y if you already know z ? Advances in Artificial Intelligence.

Encodage des relations d'indépendance conditionnelles

- $X = (X_1, \ldots, X_d)$ vecteur aléatoire d'intérêt ;
- $D = \{1, \ldots, d \geq 3\}$ ensemble des indices des variables ;
- si $A \subset D$ alors X_A sous-vecteur de X dont les composantes sont indicées par A [$A = \{1, 4, 3\}$ donne $X_A = (X_1, X_3, X_4)$].

Si A, B, C sous-ensembles non vides (sauf éventuellement C) de D deux à deux disjoints alors a-t-on

$$X_A \perp\!\!\!\perp X_B | X_C \text{ ou } X_A \text{ dep } X_B | X_C ?$$

Encodage des relations d'indépendance conditionnelles

- $X = (X_1, \ldots, X_d)$ vecteur aléatoire d'intérêt ;
- $D = \{1, \ldots, d \geq 3\}$ ensemble des indices des variables ;
- si $A \subset D$ alors X_A sous-vecteur de X dont les composantes sont indicées par A [$A = \{1, 4, 3\}$ donne $X_A = (X_1, X_3, X_4)$].

Si A, B, C sous-ensembles non vides (sauf éventuellement C) de D deux à deux disjoints alors a-t-on

$$X_A \perp\!\!\!\perp X_B | X_C \text{ ou } X_A \text{ dep } X_B | X_C ?$$

À un triplet (A, B, C) on associe

$$I(A, B, C) = \begin{cases} 1 & \text{si } X_A \perp\!\!\!\perp X_B | X_C, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Exemple I

Soit X un vecteur gaussien de matrice de variance-covariance

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1.23 & 0 & -0.25 \\ 0 & 0 & 3.03 & 0 \\ 0 & -0.25 & 0 & 0.28 \end{pmatrix}.$$

On a alors

A	B	C	I
$\{1\}$	$\{3\}$	$\{2,4\}$	1
$\{2\}$	$\{3\}$	$\{1,4\}$	1
$\{2\}$	$\{4\}$	$\{1,3\}$	0
$\{3\}$	$\{4\}$	$\{1,2\}$	1
$\{1\}$	$\{2\}$	$\{3\}$	1
$\{1,4\}$	$\{2\}$	$\{3\}$	0
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

Détails

La matrice de variance-covariance précédente est une application numérique avec $\omega_{24} = 0.9$, $\omega_{33} = 0.33$, $\omega_{44} = 4.4$ de la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\omega_{44}-\omega_{24}^2}{\omega_{44}} & 0 & -\frac{\omega_{24}}{\omega_{44}-\omega_{24}^2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{\omega_{33}} & 0 \\ 0 & -\frac{\omega_{24}}{\omega_{44}-\omega_{24}^2} & 0 & \frac{1}{\omega_{44}-\omega_{24}^2} \end{pmatrix}.$$

La matrice de précision associée est donnée par

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \omega_{24} \\ 0 & 0 & \omega_{33} & 0 \\ 0 & \omega_{24} & 0 & \omega_{44} \end{pmatrix}.$$

Exercice

Exhibez un vecteur aléatoire compatible avec le tableau suivant :

A	B	C	I
$\{1\}$	$\{2\}$	$\{3\}$	1
$\{1\}$	$\{3\}$	$\{2\}$	1
$\{3\}$	$\{2\}$	$\{1\}$	1

Deux difficultés à surmonter :

- le nombre de triplets croit comme 4^d (voir Table) ;

d	nombre de triplets
3	64
4	256
5	1024
10	1048576
15	1 073 741 824
20	un trillard
32	ne peut être représenté sur un système 64 bits

TABLE – Croissance du nombre de triplets en fonction du nombre de variables

Deux difficultés à surmonter :

- le nombre de triplets croit comme 4^d (voir Table) ;
- même si on était capable de calculer et stoquer tous les $I(A, B, C)$, comment donner du sens à ces millards et millards de bits ?

d	nombre de triplets
3	64
4	256
5	1024
10	1048576
15	1 073 741 824
20	un trillard
32	ne peut être représenté sur un système 64 bits

TABLE – Croissance du nombre de triplets en fonction du nombre de variables

Les quatres axiomes du graphoïde

Soit $\mathscr{I}$ l'ensemble des triplets (A, B, C) tels que $I(A, B, C) = 1$. Dans un article fondateur, Pearl & Paz (1987) ont remarqué que $\mathscr{I}$ satisfait les axiomes suivants :

symmétrie $(A, B, C) \in \mathscr{I} \implies (B, A, C) \in \mathscr{I}$;

fermeture $(A, B \cup B', C) \in \mathscr{I}$
$\implies (A, B, C), (A, B', C) \in \mathscr{I}$;

union $(A, B \cup B', C) \in \mathscr{I} \implies (A, B, B' \cup C) \in \mathscr{I}$;

intersection $(A, B, B' \cup C), (A, B', B \cup C) \in \mathscr{I}$
$\implies (A, B \cup B', C) \in \mathscr{I}$.

Tout $\mathscr{I}$ satisfaisant ces quatres axiomes est appelé un *graphoïde*.

Les relations de séparation dans les graphes forment un graphoïde

- Soit G un graphe dont les noeuds peuvent être mis en correspondance un à un avec $\{1, \ldots, d\} = D$.
- À tout triplet (A, B, C) de sous ensembles de D on associe

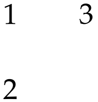
$$I(A, B, C) = \begin{cases} 1 & \text{si } A \text{ et } B \text{ sont séparés par } C \text{ dans } G \,; \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

- Si on note $\mathscr{I}$ l'ensemble des triplets (A, B, C) tels que $I(A, B, C) = 1$ alors $\mathscr{I}$ est un graphoïde.

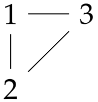
Détails

Si il n'y a pas de chemin entre A et B alors par définition on dit que A et B sont séparés par C, quelque soit C (y compris $C = \emptyset$). Si il y a un chemin entre A et B alors par définition ils ne sont pas séparés par $\emptyset$. Voir par exemple Matús (1992) pour une définition.

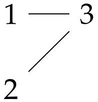
Exemples



A	B	C	I
$\{1\}$	$\{2\}$	$\{3\}$	1
$\{1\}$	$\{3\}$	$\{2\}$	1
$\{2\}$	$\{3\}$	$\{1\}$	1
$\{1\}$	$\{2\}$	$\emptyset$	1
$\{1\}$	$\{3\}$	$\emptyset$	1
$\{2\}$	$\{3\}$	$\emptyset$	1

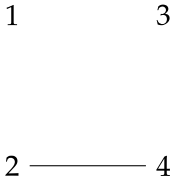


A	B	C	I
$\{1\}$	$\{2\}$	$\{3\}$	0
$\{1\}$	$\{3\}$	2	0
$\{2\}$	$\{3\}$	$\{1\}$	0
$\{1\}$	$\{2\}$	$\emptyset$	0
$\{1\}$	$\{3\}$	$\emptyset$	0
$\{2\}$	$\{3\}$	$\emptyset$	0



A	B	C	I
$\{1\}$	$\{2\}$	$\{3\}$	1
$\{1\}$	$\{3\}$	$\{2\}$	0
$\{2\}$	$\{3\}$	$\{1\}$	0
$\{1\}$	$\{2\}$	$\emptyset$	1
$\{1\}$	$\{3\}$	$\emptyset$	0
$\{2\}$	$\{3\}$	$\emptyset$	0

Exemples



A	B	C	I
{1}	{2}	{3}	1
{1}	{2}	{3,4}	1
{1,4}	{2}	{3}	0
{3}	{4}	{1}	1
{2}	{4}	{1}	0
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

En somme :

- d'une part, les relations d'indépendance conditionnelles forment un graphoïde ;
- d'autre part, les relations de séparation dans les graphes forment aussi un graphoïde.

Conclusion ? Pourrait-on représenter les premières avec les secondes ?

Oui mais… Une salve de résultats négatifs !

- Soit P une loi de probabilité, $X \sim P$, et G un graphe.
- Soit $\mathscr{I}(P)$ (resp. $\mathscr{I}(G)$), noté aussi $\mathscr{I}_P$ (resp. $\mathscr{I}_G$), l'ensemble des triplets (A, B, C) pour lesquels $X_A \perp\!\!\!\perp X_B | X_C$ (resp. A et B sont séparés par C dans le graphe G).
- On souhaite représenter $\mathscr{I}_P$ par un graphe G de sorte que
$$(A, B, C) \in \mathscr{I}_P \text{ ssi } (A, B, C) \in \mathscr{I}_G.$$

Cartes d'indépendance et de dépendance

Definition (carte d'indépendance)

Un graphe G est appelé une carte d'indépendance de la loi P si

$$(A, B, C) \in \mathscr{I}_G \implies (A, B, C) \in \mathscr{I}_P.$$

Cartes d'indépendance et de dépendance

Definition (carte d'indépendance)

Un graphe G est appelé une carte d'indépendance de la loi P si

$$(A, B, C) \in \mathscr{I}_G \implies (A, B, C) \in \mathscr{I}_P.$$

Definition (carte de dépendance)

Un graphe G est appelé une carte de dépendance de la loi P si

$$(A, B, C) \in \mathscr{I}_P \implies (A, B, C) \in \mathscr{I}_G.$$

Théorème d'impossibilité

Theorem (Pearl& Paz (1987))

Il existe des lois de probabilités pour lesquelles aucun graphe ne peut être à la fois une carte d'indépendance et de dépendance.

Théorème d'impossibilité

Theorem (Pearl& Paz (1987))

Il existe des lois de probabilités pour lesquelles aucun graphe ne peut être à la fois une carte d'indépendance et de dépendance.

La preuve est simple : il existe des lois P pour lesquelles $(A, B, C) \in \mathscr{I}_P$ mais $(A, B, C \cup C') \notin \mathscr{I}_P$; or si on remplace P par G le premier doit impliquer le second.

Exemple II

- Soient X_1, X_2, X_3, X_5 des variables aléatoires normales centrées réduites mutuellement indépendantes et posons $X_4 = X_1 + X_2 + X_5$.
- Le vecteur aléatoire $X = (X_1, X_2, X_3, X_4)$ suit alors une loi normale multivariée de matrice de variance-covariance

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Exemple II

- Soient X_1, X_2, X_3, X_5 des variables aléatoires normales centrées réduites mutuellement indépendantes et posons $X_4 = X_1 + X_2 + X_5$.
- Le vecteur aléatoire $X = (X_1, X_2, X_3, X_4)$ suit alors une loi normale multivariée de matrice de variance-covariance

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

- Conditionnellement à X_3, les variables X_1 et X_2 sont indépendantes, mais pas conditionnellement à $\{X_3, X_4\}$.

Détails

La matrice de précision (matrice inverse) est donnée par

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Conditionnellement à $\{X_3, X_4\}$, la loi de (X_1, X_2) est gaussienne de matrice de variance-covariance

$$\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Condamnés ?

- Même pour la loi gaussienne il n'existe pas de graphe qui puisse représenter parfaitement les relations d'indépendance conditionnelles !
- Le théorème d'impossibilité précédent s'accorde avec d'autres résultats d'impossibilité concernant les graphoïdes.

Détails

Un graphoïde est dit *probabiliste* si il existe une loi de probabilité P telle que $\mathscr{I}(P)$ coïncide avec ledit graphoïde. Mais il a été démontré que tous les graphoïdes ne sont pas probabilistes. Voir Studený (1989, 1992, 1994).

Un graphoïde est dit *induit par un graphe* si il existe un graphe G tel que $\mathscr{I}(G)$ coïncide avec ledit graphoïde. Mais tous les graphoïdes ne sont pas induits par un graphe. Voir Paz (1991).

Le compromis

Nous citons Pearl & Paz :

> *Being unable to provide a graphical description for* all *independencies, we settle for the following compromise : we will consider only I-maps but will insist that the graphs in those maps captures as many of P's independencies as possible, i.e., they should contain no superfluous edges.*

Note : l'emphase est celle de Pearl & Paz.

Résultat

Definition (carte d'indépendance minimale)

Un graphe G est une carte d'indépendance minimale pour la loi P si G est une carte d'indépendance et aucune arrête de G ne peut être enlevée sans déposséder G de sa propriété de carte d'indépendance.

Résultat

Definition (carte d'indépendance minimale)

Un graphe G est une carte d'indépendance minimale pour la loi P si G est une carte d'indépendance et aucune arrête de G ne peut être enlevée sans déposséder G de sa propriété de carte d'indépendance.

Theorem (Pearl & Paz (1987))

Toute loi de probabilité possède une unique carte d'indépendance minimale que l'on peut construire en enlevant du graphe complet toutes les arrêtes (i, j) *pour lesquelles* $(\{i\}, \{j\}, D \setminus \{i, j\}) \in \mathscr{I}_P$.

Résultat

Definition (carte d'indépendance minimale)

Un graphe G est une carte d'indépendance minimale pour la loi P si G est une carte d'indépendance et aucune arrête de G ne peut être enlevée sans déposséder G de sa propriété de carte d'indépendance.

Theorem (Pearl & Paz (1987))

Toute loi de probabilité possède une unique carte d'indépendance minimale que l'on peut construire en enlevant du graphe complet toutes les arrêtes (i, j) *pour lesquelles* $(\{i\}, \{j\}, D \setminus \{i, j\}) \in \mathscr{I}_P$.

La preuve vient de ce que tout graphoïde possède une unique carte d'indépendance minimale que l'on peut construire de la même façon.

Exemple I : construction de la carte d'indépendance minimale à partir (d'une partie) de $\mathscr{I}(P)$

A	B	C	I
$\{1\}$	$\{2\}$	$\{3,4\}$	1
$\{1\}$	$\{3\}$	$\{2,4\}$	1
$\{1\}$	$\{4\}$	$\{2,3\}$	1
$\{2\}$	$\{3\}$	$\{1,4\}$	1
$\{2\}$	$\{4\}$	$\{1,3\}$	0
$\{3\}$	$\{4\}$	$\{1,2\}$	1
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

TABLE – $\mathscr{I}(P)$

Exemple I : construction de la carte d'indépendance minimale à partir (d'une partie) de $\mathscr{I}(P)$

A	B	C	I
{1}	{2}	{3,4}	1
{1}	{3}	{2,4}	1
{1}	{4}	{2,3}	1
{2}	{3}	{1,4}	1
{2}	{4}	{1,3}	0
{3}	{4}	{1,2}	1
⋮	⋮	⋮	⋮

TABLE – $\mathscr{I}(P)$

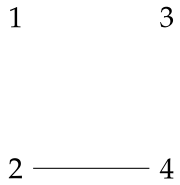


FIGURE – carte d'indépendance minimale de $\mathscr{I}(P)$

Exemple II : construction de la carte d'indépendance minimale à partir (d'une partie) de $\mathscr{I}(P)$

A	B	C	I
{1}	{2}	{3,4}	0
{1}	{3}	{2,4}	1
{1}	{4}	{2,3}	0
{2}	{3}	{1,4}	1
{2}	{4}	{1,3}	0
{3}	{4}	{1,2}	1
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

TABLE – $\mathscr{I}(P)$

Exemple II : construction de la carte d'indépendance minimale à partir (d'une partie) de $\mathscr{I}(P)$

A	B	C	I
{1}	{2}	{3,4}	0
{1}	{3}	{2,4}	1
{1}	{4}	{2,3}	0
{2}	{3}	{1,4}	1
{2}	{4}	{1,3}	0
{3}	{4}	{1,2}	1
⋮	⋮	⋮	⋮

TABLE – $\mathscr{I}(P)$

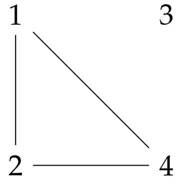


FIGURE – carte d'indépendance minimale de $\mathscr{I}(P)$

Exercice I : « lisez » la carte minimale et remplissez le tableau

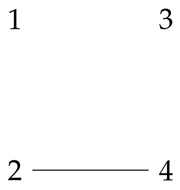


FIGURE – carte d'indépendance minimale de $\mathscr{I}(P)$

A	B	C	I
{1}	{2}	{3,4}	
{1}	{3}	{2,4}	
{1}	{4}	{2,3}	
{2}	{3}	{1,4}	
{2}	{4}	{1,3}	
{3}	{4}	{1,2}	
-	-	-	-
{1}	{2}	{3}	
{1,4}	{2}	{3}	
{3}	{4}	{1}	
{2}	{4}	{1}	
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

TABLE – $\mathscr{I}(P)$

Exercice I : « lisez » la carte minimale et remplissez le tableau

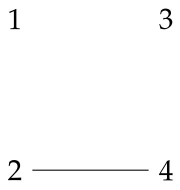


FIGURE – carte d'indépendance minimale de $\mathscr{I}(P)$

A	B	C	I
{1}	{2}	{3,4}	1
{1}	{3}	{2,4}	
{1}	{4}	{2,3}	
{2}	{3}	{1,4}	
{2}	{4}	{1,3}	
{3}	{4}	{1,2}	
-	-	-	-
{1}	{2}	{3}	
{1,4}	{2}	{3}	
{3}	{4}	{1}	
{2}	{4}	{1}	
⋮	⋮	⋮	⋮

TABLE – $\mathscr{I}(P)$

Exercice I : « lisez » la carte minimale et remplissez le tableau

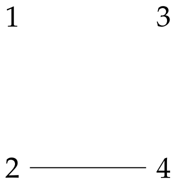


FIGURE – carte d'indépendance minimale de $\mathscr{I}(P)$

A	B	C	I
{1}	{2}	{3,4}	1
{1}	{3}	{2,4}	1
{1}	{4}	{2,3}	
{2}	{3}	{1,4}	
{2}	{4}	{1,3}	
{3}	{4}	{1,2}	
-	-	-	-
{1}	{2}	{3}	
{1,4}	{2}	{3}	
{3}	{4}	{1}	
{2}	{4}	{1}	
⋮	⋮	⋮	⋮

TABLE – $\mathscr{I}(P)$

Exercice I : « lisez » la carte minimale et remplissez le tableau

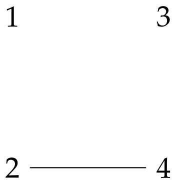


FIGURE – carte d'indépendance minimale de $\mathscr{I}(P)$

A	B	C	I
{1}	{2}	{3,4}	1
{1}	{3}	{2,4}	1
{1}	{4}	{2,3}	1
{2}	{3}	{1,4}	
{2}	{4}	{1,3}	
{3}	{4}	{1,2}	
-	-	-	-
{1}	{2}	{3}	
{1,4}	{2}	{3}	
{3}	{4}	{1}	
{2}	{4}	{1}	
⋮	⋮	⋮	⋮

TABLE – $\mathscr{I}(P)$

Exercice I : « lisez » la carte minimale et remplissez le tableau

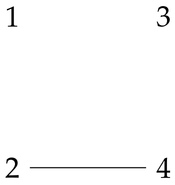


FIGURE – carte d'indépendance minimale de $\mathscr{I}(P)$

A	B	C	I
{1}	{2}	{3,4}	1
{1}	{3}	{2,4}	1
{1}	{4}	{2,3}	1
{2}	{3}	{1,4}	1
{2}	{4}	{1,3}	
{3}	{4}	{1,2}	
-	-	-	-
{1}	{2}	{3}	
{1,4}	{2}	{3}	
{3}	{4}	{1}	
{2}	{4}	{1}	
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

TABLE – $\mathscr{I}(P)$

Exercice I : « lisez » la carte minimale et remplissez le tableau

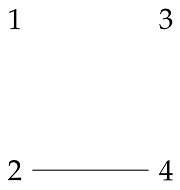


FIGURE – carte d'indépendance minimale de $\mathscr{I}(P)$

A	B	C	I
{1}	{2}	{3,4}	1
{1}	{3}	{2,4}	1
{1}	{4}	{2,3}	1
{2}	{3}	{1,4}	1
{2}	{4}	{1,3}	0
{3}	{4}	{1,2}	
-	-	-	-
{1}	{2}	{3}	
{1,4}	{2}	{3}	
{3}	{4}	{1}	
{2}	{4}	{1}	
⋮	⋮	⋮	⋮

TABLE – $\mathscr{I}(P)$

Exercice I : « lisez » la carte minimale et remplissez le tableau

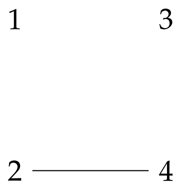


FIGURE – carte d'indépendance minimale de $\mathscr{I}(P)$

A	B	C	I
{1}	{2}	{3,4}	1
{1}	{3}	{2,4}	1
{1}	{4}	{2,3}	1
{2}	{3}	{1,4}	1
{2}	{4}	{1,3}	0
{3}	{4}	{1,2}	1
-	-	-	-
{1}	{2}	{3}	
{1,4}	{2}	{3}	
{3}	{4}	{1}	
{2}	{4}	{1}	
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

TABLE – $\mathscr{I}(P)$

Exercice I : « lisez » la carte minimale et remplissez le tableau

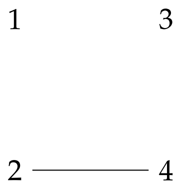


FIGURE – carte d'indépendance minimale de $\mathscr{I}(P)$

A	B	C	I
{1}	{2}	{3,4}	1
{1}	{3}	{2,4}	1
{1}	{4}	{2,3}	1
{2}	{3}	{1,4}	1
{2}	{4}	{1,3}	0
{3}	{4}	{1,2}	1
-	-	-	-
{1}	{2}	{3}	1
{1,4}	{2}	{3}	
{3}	{4}	{1}	
{2}	{4}	{1}	
⋮	⋮	⋮	⋮

TABLE – $\mathscr{I}(P)$

Exercice I : « lisez » la carte minimale et remplissez le tableau

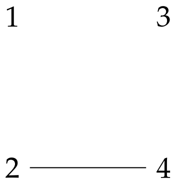


FIGURE – carte d'indépendance minimale de $\mathscr{I}(P)$

A	B	C	I
{1}	{2}	{3,4}	1
{1}	{3}	{2,4}	1
{1}	{4}	{2,3}	1
{2}	{3}	{1,4}	1
{2}	{4}	{1,3}	0
{3}	{4}	{1,2}	1
-	-	-	-
{1}	{2}	{3}	1
{1,4}	{2}	{3}	?
{3}	{4}	{1}	
{2}	{4}	{1}	
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

TABLE – $\mathscr{I}(P)$

Exercice I : « lisez » la carte minimale et remplissez le tableau

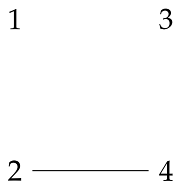


FIGURE – carte d'indépendance minimale de $\mathscr{I}(P)$

A	B	C	I
{1}	{2}	{3,4}	1
{1}	{3}	{2,4}	1
{1}	{4}	{2,3}	1
{2}	{3}	{1,4}	1
{2}	{4}	{1,3}	0
{3}	{4}	{1,2}	1
-	-	-	-
{1}	{2}	{3}	1
{1,4}	{2}	{3}	?
{3}	{4}	{1}	1
{2}	{4}	{1}	
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

TABLE – $\mathscr{I}(P)$

Exercice I : « lisez » la carte minimale et remplissez le tableau

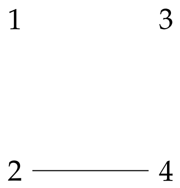


FIGURE – carte d'indépendance minimale de $\mathscr{I}(P)$

A	B	C	I
{1}	{2}	{3,4}	1
{1}	{3}	{2,4}	1
{1}	{4}	{2,3}	1
{2}	{3}	{1,4}	1
{2}	{4}	{1,3}	0
{3}	{4}	{1,2}	1
-	-	-	-
{1}	{2}	{3}	1
{1,4}	{2}	{3}	?
{3}	{4}	{1}	1
{2}	{4}	{1}	?
⋮	⋮	⋮	⋮

TABLE – $\mathscr{I}(P)$

Exercice II : « lisez » la carte minimale et remplissez le tableau

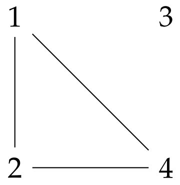


FIGURE – carte d'indépendance minimale de $\mathscr{I}(P)$

A	B	C	I
{1}	{2}	{3,4}	
{1}	{3}	{2,4}	
{1}	{4}	{2,3}	
{2}	{3}	{1,4}	
{2}	{4}	{1,3}	
{3}	{4}	{1,2}	
-	-	-	-
{1}	{2}	{3}	
{1,4}	{2}	{3}	
{3}	{4}	{1}	
{2}	{4}	{1}	
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

TABLE – $\mathscr{I}(P)$

Exercice II : « lisez » la carte minimale et remplissez le tableau

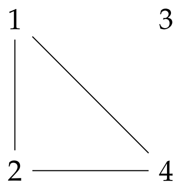


FIGURE – carte d'indépendance minimale de $\mathscr{I}(P)$

A	B	C	I
{1}	{2}	{3,4}	0
{1}	{3}	{2,4}	
{1}	{4}	{2,3}	
{2}	{3}	{1,4}	
{2}	{4}	{1,3}	
{3}	{4}	{1,2}	
-	-	-	-
{1}	{2}	{3}	
{1,4}	{2}	{3}	
{3}	{4}	{1}	
{2}	{4}	{1}	
⋮	⋮	⋮	⋮

TABLE – $\mathscr{I}(P)$

Exercice II : « lisez » la carte minimale et remplissez le tableau

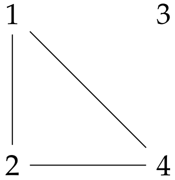


FIGURE – carte d'indépendance minimale de $\mathscr{I}(P)$

A	B	C	I
{1}	{2}	{3,4}	0
{1}	{3}	{2,4}	1
{1}	{4}	{2,3}	
{2}	{3}	{1,4}	
{2}	{4}	{1,3}	
{3}	{4}	{1,2}	
-	-	-	-
{1}	{2}	{3}	
{1,4}	{2}	{3}	
{3}	{4}	{1}	
{2}	{4}	{1}	
⋮	⋮	⋮	⋮

TABLE – $\mathscr{I}(P)$

Exercice II : « lisez » la carte minimale et remplissez le tableau

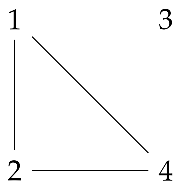


FIGURE – carte d'indépendance minimale de $\mathscr{I}(P)$

A	B	C	I
{1}	{2}	{3,4}	0
{1}	{3}	{2,4}	1
{1}	{4}	{2,3}	0
{2}	{3}	{1,4}	
{2}	{4}	{1,3}	
{3}	{4}	{1,2}	
-	-	-	-
{1}	{2}	{3}	
{1,4}	{2}	{3}	
{3}	{4}	{1}	
{2}	{4}	{1}	
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

TABLE – $\mathscr{I}(P)$

Exercice II : « lisez » la carte minimale et remplissez le tableau

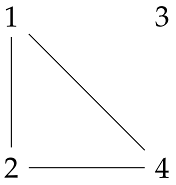


Figure – carte d'indépendance minimale de $\mathscr{I}(P)$

A	B	C	I
{1}	{2}	{3,4}	0
{1}	{3}	{2,4}	1
{1}	{4}	{2,3}	0
{2}	{3}	{1,4}	1
{2}	{4}	{1,3}	
{3}	{4}	{1,2}	
-	-	-	-
{1}	{2}	{3}	
{1,4}	{2}	{3}	
{3}	{4}	{1}	
{2}	{4}	{1}	
⋮	⋮	⋮	⋮

Table – $\mathscr{I}(P)$

Exercice II : « lisez » la carte minimale et remplissez le tableau

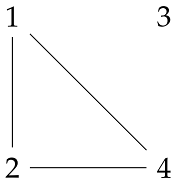


FIGURE – carte d'indépendance minimale de $\mathscr{I}(P)$

A	B	C	I
{1}	{2}	{3,4}	0
{1}	{3}	{2,4}	1
{1}	{4}	{2,3}	0
{2}	{3}	{1,4}	1
{2}	{4}	{1,3}	0
{3}	{4}	{1,2}	
-	-	-	-
{1}	{2}	{3}	
{1,4}	{2}	{3}	
{3}	{4}	{1}	
{2}	{4}	{1}	
⋮	⋮	⋮	⋮

TABLE – $\mathscr{I}(P)$

Exercice II : « lisez » la carte minimale et remplissez le tableau

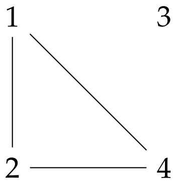


FIGURE – carte d'indépendance minimale de $\mathscr{I}(P)$

A	B	C	I
{1}	{2}	{3,4}	0
{1}	{3}	{2,4}	1
{1}	{4}	{2,3}	0
{2}	{3}	{1,4}	1
{2}	{4}	{1,3}	0
{3}	{4}	{1,2}	1
-	-	-	-
{1}	{2}	{3}	
{1,4}	{2}	{3}	
{3}	{4}	{1}	
{2}	{4}	{1}	
⋮	⋮	⋮	⋮

TABLE – $\mathscr{I}(P)$

Exercice II : « lisez » la carte minimale et remplissez le tableau

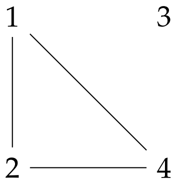


FIGURE – carte d'indépendance minimale de $\mathscr{I}(P)$

A	B	C	I
{1}	{2}	{3,4}	0
{1}	{3}	{2,4}	1
{1}	{4}	{2,3}	0
{2}	{3}	{1,4}	1
{2}	{4}	{1,3}	0
{3}	{4}	{1,2}	1
-	-	-	-
{1}	{2}	{3}	?
{1,4}	{2}	{3}	
{3}	{4}	{1}	
{2}	{4}	{1}	
⋮	⋮	⋮	⋮

TABLE – $\mathscr{I}(P)$

Exercice II : « lisez » la carte minimale et remplissez le tableau

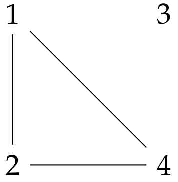


FIGURE – carte d'indépendance minimale de $\mathscr{I}(P)$

A	B	C	I
{1}	{2}	{3,4}	0
{1}	{3}	{2,4}	1
{1}	{4}	{2,3}	0
{2}	{3}	{1,4}	1
{2}	{4}	{1,3}	0
{3}	{4}	{1,2}	1
-	-	-	-
{1}	{2}	{3}	?
{1,4}	{2}	{3}	?
{3}	{4}	{1}	
{2}	{4}	{1}	
⋮	⋮	⋮	⋮

TABLE – $\mathscr{I}(P)$

Exercice II : « lisez » la carte minimale et remplissez le tableau

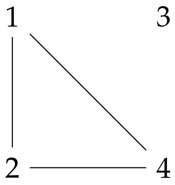


FIGURE – carte d'indépendance minimale de $\mathscr{I}(P)$

A	B	C	I
{1}	{2}	{3,4}	0
{1}	{3}	{2,4}	1
{1}	{4}	{2,3}	0
{2}	{3}	{1,4}	1
{2}	{4}	{1,3}	0
{3}	{4}	{1,2}	1
-	-	-	-
{1}	{2}	{3}	?
{1,4}	{2}	{3}	?
{3}	{4}	{1}	1
{2}	{4}	{1}	
⋮	⋮	⋮	⋮

TABLE – $\mathscr{I}(P)$

Exercice II : « lisez » la carte minimale et remplissez le tableau

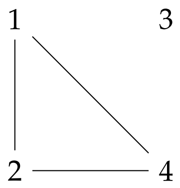


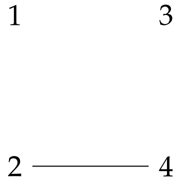
FIGURE – carte d'indépendance minimale de $\mathscr{I}(P)$

A	B	C	I
{1}	{2}	{3,4}	0
{1}	{3}	{2,4}	1
{1}	{4}	{2,3}	0
{2}	{3}	{1,4}	1
{2}	{4}	{1,3}	0
{3}	{4}	{1,2}	1
-	-	-	-
{1}	{2}	{3}	?
{1,4}	{2}	{3}	?
{3}	{4}	{1}	1
{2}	{4}	{1}	?
⋮	⋮	⋮	⋮

TABLE – $\mathscr{I}(P)$

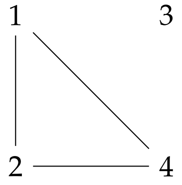
Pour répondre à « ? », la carte d'indépendance minimale est en général insuffisante

Exercice I



A	B	C	I
{1}	{2}	{3}	1
{1,4}	{2}	{3}	?
{3}	{4}	{1}	1
{2}	{4}	{1}	? (0)
⋮	⋮	⋮	⋮

Exercice II



A	B	C	I
{1}	{2}	{3}	? (1)
{1,4}	{2}	{3}	?
{3}	{4}	{1}	1
{2}	{4}	{1}	?
⋮	⋮	⋮	⋮

Modèles graphiques gaussiens

Theorem

Si $X \sim \mathcal{N}(\mu, \Sigma)$, Σ *inversible, alors*

$$X_i \perp\!\!\!\perp X_j | X_{D\setminus\{i,j\}} \text{ ssi } \omega_{ij} = 0,$$

c'est à dire,

$$(\{i\}, \{j\}, D \setminus \{i,j\}) \in \mathscr{I}(\mathcal{N}(\mu, \Sigma)) \text{ ssi } \omega_{ij} = 0,$$

où ω_{ij} *est l'élément à la* $i^{\text{ème}}$ *ligne et* $j^{\text{ème}}$ *colonne de* Ω *l'inverse de* Σ.

Deuxième partie II

Copules

Deuxième partie : copules

Les copules : pour quoi faire ?

Les copules sont un outil puissant pour

- **construire des modèles statistiques multivariés** (avec des lois marginales univariées arbitraires) ;
- **modéliser la dépendance entre variables aléatoires** ;
- faire de **l'inférence semi-paramétrique** (sans faire d'hypothèse sur les lois marginales univariées).

Les copules : une niche ?

- « *Copula modeling* » élue « *top topic* » (catégorie « *Mathematics* ») sur « *ScienceWatch* » en 2010.
- Standard en finance, assurance, analyse et gestion du risque, et hydrologie

Les copules : une niche ?

- « *Copula modeling* » élue « *top topic* » (catégorie « *Mathematics* ») sur « *ScienceWatch* » en 2010.
- Standard en finance, assurance, analyse et gestion du risque, et hydrologie
- Tristement célèbre suite à un article dans *The Wired* « *Recipe for Disaster : The Formula That Killed Wall Street* paru en 2009 après la crise des *subprimes*.
- Reimprimé dans *Significance* en 2012 ; Felix Simon a reçu le prix *American Statistical Association's Excellence in Statistical Reporting*.

Et en biologie ?

- Encore timide, mais on en voit de plus en plus.
- Les données discrètes et/ou mixtes ont été un frein pendant longtemps mais ce verrou est en train d'être débloqué.

Rappels de statistique en 30 secondes

- La fonction de répartition F d'une variable aléatoire X, donnée par

$$F(x) = \Pr\{X \leq x\},$$

caractérise sa loi.

- Il en va de même pour les vecteurs aléatoires $X = (X_1, \ldots, X_d)$:

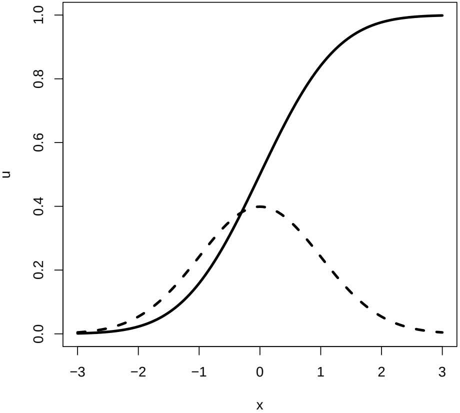
$$F(x_1, \ldots, x_d) = \Pr\{X_1 \leq x_1, \ldots, X_d \leq x_d\} ;$$

les marginales (univariées) de F sont données par

$$F_j(x_j) = F(\infty, \ldots, \infty, x_j, \infty, \ldots, \infty) = \Pr\{X_j \leq x_j\}.$$

- Dans toute cette présentation on suppose pour simplifier que chaque F_j est inversible.

Illustration

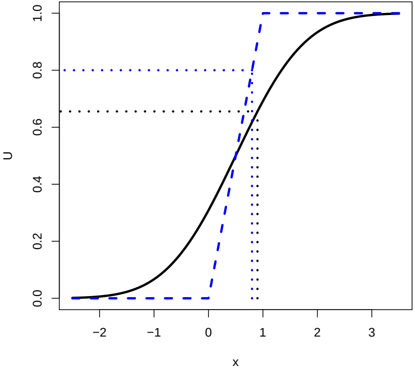


Comparer est la clé !

- On a observé les réalisations de deux variables aléatoires : $X_1 = 0.9$ et $X_2 = 0.8$. Quelle est la plus grande ?

Comparer est la clé !

- On a observé les réalisations de deux variables aléatoires : $X_1 = 0.9$ et $X_2 = 0.8$. Quelle est la plus grande ?
- Si $X_1 \sim \mathcal{N}(\frac{1}{2}, 1)$ et $X_2 \sim \mathcal{U}(0, 1)$ alors $F_1(0.9) \approx 0.65 < 0.8 = F_2(0.8)$.



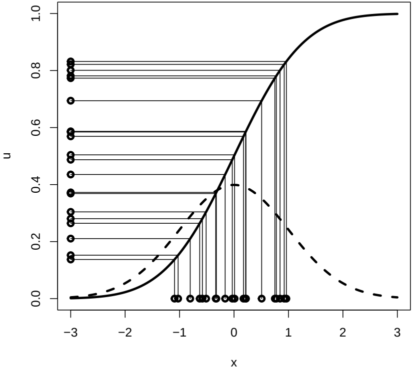
Cas général : comparer les ordres

Relations fondamentales :

$F(X) \sim \mathscr{U}(0,1)$ (ordre)

$F^{-1}(U) \stackrel{d}{=} X$ (quantile),

où $U \sim \mathscr{U}(0,1)$.



Principe

- Pour modéliser la dépendance entre deux (ou plus) variables aléatoires, il faut donc d'abord les mettre à la **même échelle** ;
- les rendre **adimensionnelles** ;
- c'est à dire modéliser la **dépendance entre les ordres** des quantiles.

Théorème de Sklar

Si $(X_1, \ldots, X_d) \sim F$ de marges $F_1, \ldots, F_d$ alors il existe une unique fonction de répartition C telle que

$$(F_1(X_1), \ldots, F_d(X_d)) \sim C.$$

Réciproquement, si C est la fonction de répartition d'un vecteur $(U_1, \ldots, U_d)$ avec $U_j \sim \mathscr{U}(0,1)$, $j = 1, \ldots, d$, alors

$$(F_1^{-1}(U_1), \ldots, F_d^{-1}(U_d)) \sim F.$$

De façon équivalente,

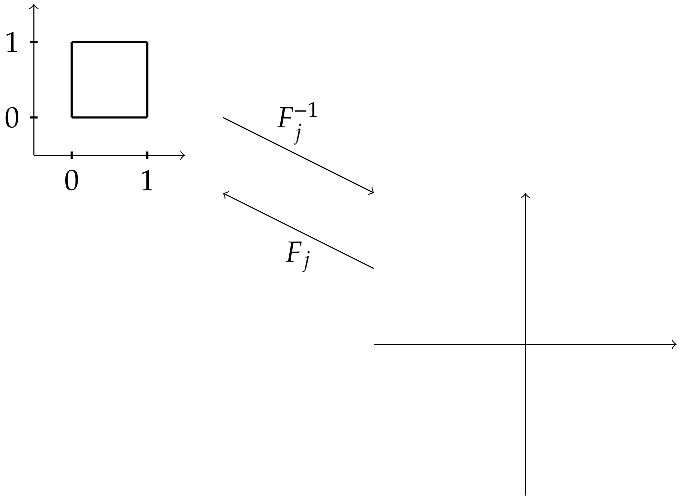
Si $(X_1, \ldots, X_d) \sim F$ de marges $F_1, \ldots, F_d$ alors il existe une unique fonction de répartition C telle que

$$F(x_1, \ldots, x_d) = C(F_1(x_1), \ldots, F_d(x_d)),$$

ce qui donne

$$C(u_1, \ldots, u_d) = F(F_1^{-1}(u_1), \ldots, F_d^{-1}(u_d)).$$

Illustration



La copule gaussienne

- Soit N la fonction de répartition de la loi normale multivariée centrée réduite de matrice de corrélation Σ.
- Ainsi si $Z = (Z_1, \ldots, Z_d) \sim \mathcal{N}(0, \Sigma)$ alors

$$N(z_1, \ldots, z_d) = \Pr\{Z_1 \leq z_1, \ldots, Z_d \leq z_d\}.$$

La copule gaussienne

- Soit N la fonction de répartition de la loi normale multivariée centrée réduite de matrice de corrélation Σ.
- Ainsi si $Z = (Z_1, \dots, Z_d) \sim \mathcal{N}(0, \Sigma)$ alors

$$N(z_1, \dots, z_d) = \Pr\{Z_1 \leq z_1, \dots, Z_d \leq z_d\}.$$

- D'après le théorème de Sklar, il existe une unique copule C telle que

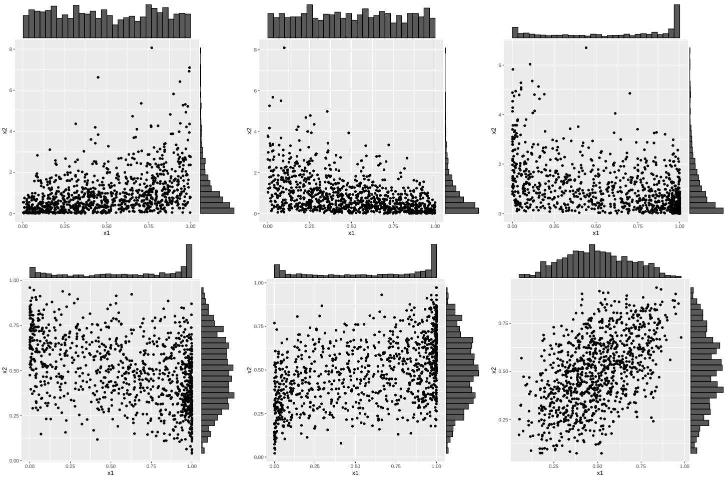
$$N(z_1, \dots, z_d) = C(N_1(z_1), \dots, N_d(z_d)), \text{ càd}$$
$$C(u_1, \dots, u_d) = N(N_1^{-1}(u_1), \dots, N_d^{-1}(u_d)).$$

- On appelle ce C une copule gaussienne. Elle est paramétrée par Σ et on la note donc C_Σ ou $C(\cdot; \Sigma)$.

En pratique

- On choisit C.
- On choisit $F_1, \ldots, F_d$.
- On a notre modèle $F = C(F_1, F_2)$.
- On peut aussi *ne faire aucune hypothèse sur les lois marginales* ; c'est le point de départ des méthodes semiparamétriques.

Illustrations



$$F = C_{\Sigma}(F_1, F_2)$$

Revenons à nos modèles graphiques

- On observe un vecteur aléatoire $X = (X_1, \ldots, X_d)$.
- On veut calculer sa carte d'indépendance minimale.
- Si $X \sim \mathcal{N}(\mu, \Sigma)$, c'est facile ; elle est donnée par $\Omega = \Sigma^{-1}$.
- Mais si nos variables ne sont pas gaussiennes ?

Lever l'hypothèse gaussienne : méthode basée sur la copule gaussienne

- Dans le cas gaussien on a

$$F(x_1, \dots, x_d) = C_\Sigma(N_1(x_1), \dots, N_d(x_d)).$$

Lever l'hypothèse gaussienne : méthode basée sur la copule gaussienne

- Dans le cas gaussien on a

$$F(x_1, \ldots, x_d) = C_\Sigma(N_1(x_1), \ldots, N_d(x_d)).$$

- On peut au moins lever les restrictions $F_j = N_j$!
- Notre modèle devient

$$F(x_1, \ldots, x_d) = C_\Sigma(F_1(x_1), \ldots, F_d(x_d)),$$

où $F_1, \ldots, F_d$ sont *arbitraires*.

Lever l'hypothèse gaussienne : méthode basée sur la copule gaussienne

- Dans le cas gaussien on a

$$F(x_1, \dots, x_d) = C_\Sigma(N_1(x_1), \dots, N_d(x_d)).$$

- On peut au moins lever les restrictions $F_j = N_j$!
- Notre modèle devient

$$F(x_1, \dots, x_d) = C_\Sigma(F_1(x_1), \dots, F_d(x_d)),$$

  où $F_1, \dots, F_d$ sont *arbitraires*.
- Cela revient à supposer que

$$(X_1, \dots, X_d) = (t_1(Z_1), \dots, t_d(X_d)), \text{ et}$$
$$(Z_1, \dots, Z_d) = (t_1^{-1}(X_1), \dots, t_d^{-1}(X_d)),$$

  pour certaines transformations $t_1, \dots, t_d$ et un certain vecteur gaussien $Z \sim \mathcal{N}(0, \Sigma)$.

Théorème (Liu et al, 2009)

Sous l'hypothèse du modèle basé sur la copule gaussienne, on a

$$Z_i \perp\!\!\!\perp Z_j | Z_{D \setminus \{i,j\}} \text{ ssi } X_i \perp\!\!\!\perp X_j | X_{D \setminus \{i,j\}}.$$

Pour calculer la carte minimale de X il suffit donc d'estimer la matrice Ω de la copule gaussienne, *quelles que soient les marginales de* X.

Conclusion